САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Решения подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2013 г.

Решения задач

Задача № 1.

Условие: Астроном-любитель сделал фотографию ночного неба (см. рис. 1). Определите, какие созвездия видны на фотографии. (1 балл за правильно названное созвездие).

Рис. 1.

Решение:

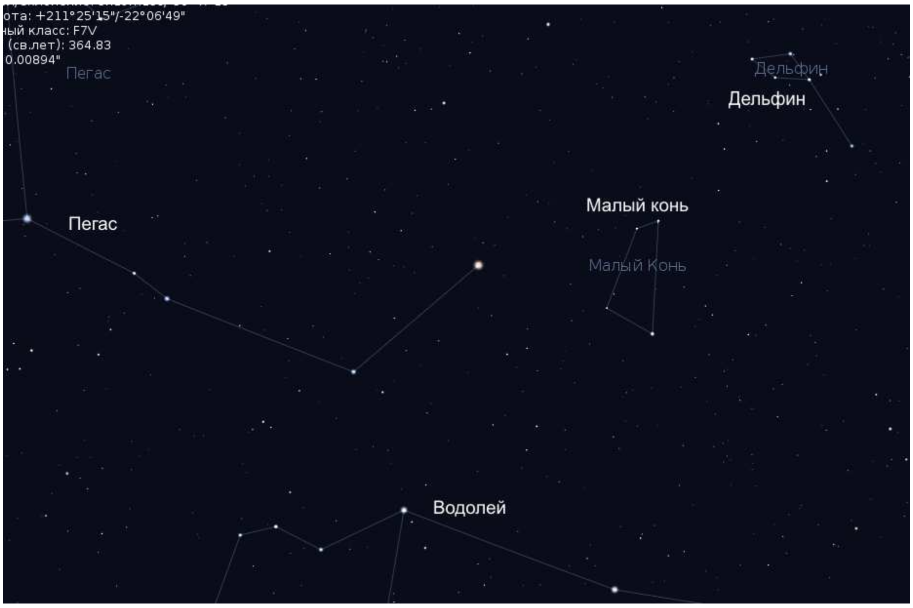

Рис. 2.

Созвездия, представленные на фотографии, легко идентифицировать при сравнении последней с картами звездного неба или с картиной визуализации звездного неба какой-либо компьютерной программы, например Stellarium. На рис. 2 представлен скриншот указанной программы с указанием созвездий того же участка неба. Очевидно, что на исходной фотографии видны часть созвездий **Пегаса**, **Водолея**, а также **Дельфин** и **Малый конь**.

Ответ: **Пегас**, **Водолей**, **Дельфин** и **Малый конь** ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 2.

Условие: На рис. 1. представлен трек, оставленный Международной космической станцией (МКС) при пролете над местом наблюдения. На какой угол переместилась станция по небосводу относительно наблюдателя за время наблюдений, если время экспозиции фотокамеры составляет $\Delta t = 60$ сек, а угловая скорость видимого движения МКС равна $\omega = 19.3'$/сек (ответ представить в градусах и радианах). Определите также угловой масштаб фотографии μ (град/мм). (3 балла).

Дано:

$\Delta t = 60$ сек;
$\omega = 19.3'$/сек;

Найти:

$\Delta\varphi$ – ? μ – ?

Решение:

Из курса физики (раздел – кинематика вращательного движения материальной точки, 9 класс) известно, что угол, на который сместился объект за время наблюдений, можно определить как

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 1158' = 19.3^\circ = 3.37 \cdot 10^{-1}\text{рад}. \tag{1}$$

Угловой масштаб фотографии – параметр, определяемый отношением углового размера какого-либо объекта ($\Delta\varphi$), представленного на фотографии к его линейному размеру ($\Delta\ell$), определяемому линейкой (или каким-либо другим измерительным прибором) по фотографии, т.е.

$$\mu = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell} = \frac{19.3^\circ}{76\,\text{мм}} = 0.254\,^\circ/\text{мм}. \tag{2}$$

здесь $\Delta\ell = 76$ мм – линейный размер трека МКС, измеренный на стандартной распечатке страницы заданий с фотографией (ваш результат может несколько отличаться от указанного из-за различных форматов распечатки принтеров).

Ответ: $\Delta\varphi = 19.3^\circ = 3.37 \cdot 10^{-1}$рад, $\mu = 0.254\,^\circ/$мм ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3.

Условие: Известно, что все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении (против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса Земли). В некоторый момент планеты Венера и Юпитер оказались на небе рядом и недалеко от Солнца. В какую сторону относительно Солнца они будут перемещаться по небу для земного наблюдателя? Рассмотрите все возможные случаи (3 балла).

Решение:

Как известно, Венера – нижняя планета (ее орбита лежит внутри орбиты Земли), см рис. 3 (орбита I), Юпитер – верхняя планета (его орбита расположена вне орбиты Земли), см рис. 3 (орбита III). Как известно, чем дальше планета движется от Солнца, тем меньше ее скорость (прямое следствие закона сохранения механической энергии), следовательно выполняется неравенство вида:

$$V_J < V_\oplus < V_V, \tag{3}$$

здесь $V_J, V_\oplus, V_V$ – скорость Юпитера, Земли, Венеры относительно Солнца (на рис. 3 указаны стрелками).

Согласно рис. 3, Юпитер может находится недалеко от Солнца, если только он находится вблизи своего соединения с Солнцем (конфигурация EPC1). В силу неравенства (3) скорость движения Юпитера относительно земного наблюдателя будет $V_\oplus - V_J$ и будет направлена от Солнца вправо. Следовательно, Юпитер в окрестности своего соединения относительно Солнца всегда движется попятно (т.е. с востока на запад).

Венера может находится вблизи Солнца, если находится в окрестности своего верхнего (на рис 3. конфигурация IPC1) или нижнего соединения (на рис 3. конфигурация IPC3). Поскольку $V_\oplus < V_V$, то в нижнем соединении вектор скорости Венеры относительно земного наблюдателя направлен с востока на запад, т.о. планета движется относительно Солнца попятно (также как и Юпитер). В верхнем соединении вектор скорости Венеры относительно земного наблюдателя направлен с запада на восток, т.о. движение планеты относительно Солнца – прямое.

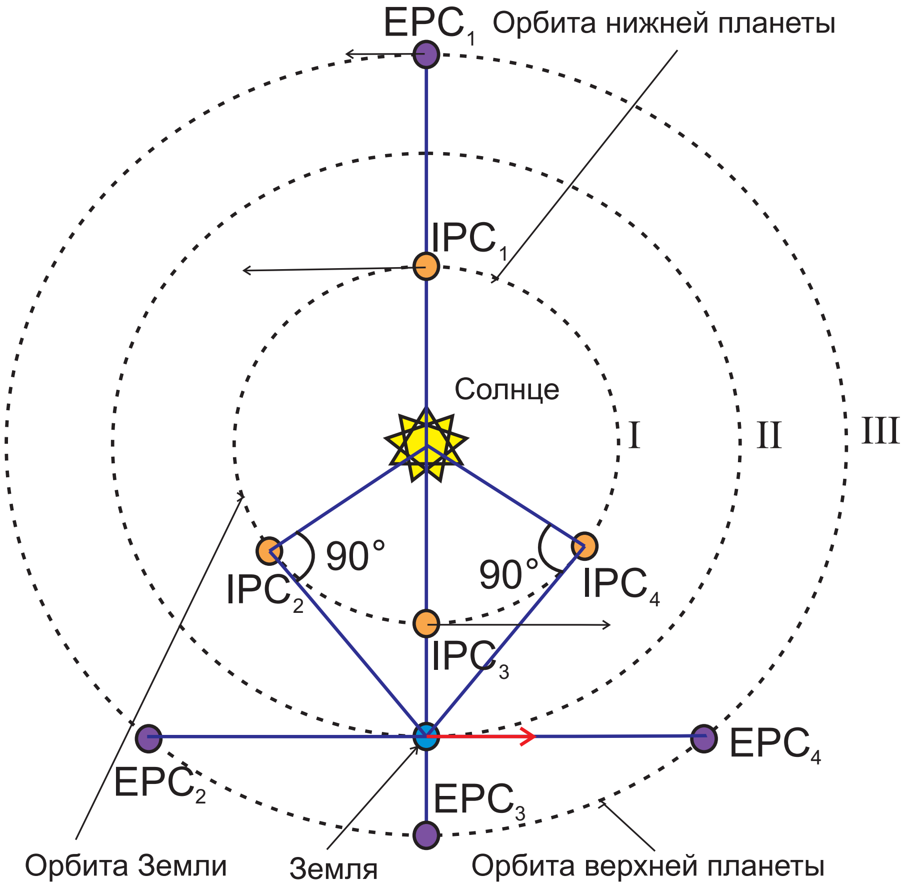

Рис. 3.

Ответ: Движение Юпитера относительно Солнца попятное (с восток на запад); Движение Венеры в окрестности нижнего соединения попятное (с восток на запад), в окрестности верхнего соединения – прямое (с запада на восток) ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4.

<u>Условие:</u> Как известно, Международная космическая станция (МКС) имеет сидерический период обращения вокруг центра Земли равный 93 мин. Сколько раз может пройти МКС над данной местностью за сутки (4 балла).

<u>Дано:</u>

T_S = 93 мин = 1.55 часа;
$T_\oplus$ = 23 часа 56 мин 4 сек $\approx$ 24 часа;

<u>Найти:</u>

N – ?

<u>Решение:</u>

Как известно, МКС движется относительно Земли по почти круговой траектории в том же направлении, что и Земля в своем суточном движении, т.е. с запада на восток. Относительно, земного наблюдателя МКС будет проходить над одной и той же точкой поверхности Земли через промежуток времени S – синодический период обращения МКС, определяемый уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_\oplus}, \;\Rightarrow\; S = \frac{T_\oplus \cdot T_S}{T_\oplus - T_S} = 1.657\,\text{часа}. \tag{4}$$

Количество раз, которое может пройти МКС над данной местностью за сутки можно определить отношением продолжительности суток и периода S:

$$N = \left[\frac{24\,\text{часа}}{S}\right] + 1 = 15\,\text{раз}. \tag{5}$$

<u>Ответ:</u> $N = 15$ раз ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5.

<u>Условие:</u> На краю диска Солнца обнаружен протуберанец, угловой размер которого равен 0.5 угл. мин. Оцените его линейные размеры. (4 балла)

<u>Дано:</u>

$\Delta\rho_p = 0.5$ угл. мин;

<u>Найти:</u>

ℓ – ?

<u>Решение:</u>

Как известно, угловой диаметр Солнца составляет $\Delta\rho_\odot = 32'$, а его линейный размер – $D_\odot = 1.4$ млн км. Следовательно, можно определить масштаб изображения как

$$\mu = \frac{D_\odot}{\Delta\rho_\odot} = 43.8 \cdot 10^3\,\text{км}/'. \tag{6}$$

Тогда легко определить линейный размер протуберанца:

$$\ell = \mu \cdot \Delta\rho_p = 21.9 \cdot 10^3\,\text{км}. \tag{7}$$

<u>Ответ:</u> $\ell = 21.9 \cdot 10^3$ км ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6.

Условие: В одном фантастическом фильме описывается вспышка сверхновой, наблюдавшаяся на Земле. Как утверждается в фильме, через 50 лет после регистрации вспышки до Земли дошла ударная волна, возникшая при вспышке (что привело к разнообразным катаклизмам на Земле). Предположим, что ударная волна распространялась со скоростью 20 тыс. км/с (что близко к реальной средней скорости ударных волн, возникающих при вспышках сверхновых). На каком расстоянии от Земли должна была бы находиться такая сверхновая? Какие объекты в действительности находятся на таких расстояниях? (5 баллов)

Дано:

$V_w = 2 \cdot 10^4$ км/с;
$\Delta t = 50$ лет $= 1.578 \cdot 10^9$ сек;

Найти:

ℓ – ?

Решение:

Скорость света равна 300 тыс. км/с, что в 15 раз больше скорости ударной волны. Поэтому временем распространения света для оценки можно пренебречь, и расстояние, на которое авторы фильма поместили сверхновую, можно вычислить, умножив скорость распространения волны на указанное время:

$$\mu = V_w \cdot \Delta t = 3.156 \cdot 10^{13}\,\text{км} = 3.33\,\text{св.л.}. \qquad (8)$$

Проще всего заметить, что скорость распространения волны равна 1/15 светового года в год, поэтому расстояние окажется равным 50/15 св.года, т.е. примерно 3.33 св.года. Никаких хорошо известных объектов на этом расстоянии от Земли нет – объекты Солнечной системы находятся существенно ближе, а расстояние до ближайшей к Солнцу звезды примерно в 1.3 раза больше.

Ответ: $\ell = 3.33$ св.года ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 7.

Условие: Используя лишь закон Тициуса-Боде, предположение о круговых орбитах планет и значение скорости света, оцените время, в течение которого свет идет от Венеры и Меркурия до Земли в моменты их наибольшей элонгации для земного наблюдателя (6 баллов).

Дано:

орбиты планет круговые;
положение – наибольшая элонгация;

Найти:

t_V, t_M – ?

Решение:

Как известно, закон Тициуса-Боде определяет расстояние планеты от Солнца и представляется в виде

$$r_n = 0.1(4 + 3 \cdot 2^n), \qquad (9)$$

где n – планетный индекс, для каждой планеты, принимающий свое значение. Так для Меркурия – $n = \infty$, а для Венеры – $n = 0$, для Земли – $n = 1$. Расстояние для Меркурия, Венеры и Земли равны соответственно $r_M = 0.4$ а.е., $r_V = 0.7$ а.е., $r_E = 1.0$ а.е.

В положении наибольшей элонгации планеты находятся в одной из точек IPC_2 и IPC_4 рис. 3. При этом планета, Земля и Солнце образуют прямоугольный треугольник, следовательно, расстоние от планеты до Земли можно вычислить по теореме Пифагора:

$$r_{E-P} = \sqrt{r_E^2 - r_P^2}, \;\; r_P = r_M, r_V. \qquad (10)$$

Так для Меркурия эта величина составляет $r_{E-M} = 0.917$ а.е., $r_{E-V} = 0.714$ а.е.

В итоге, время, в течение которого свет идет от Венеры и Меркурия до Земли, составляет

$$t_M = \frac{r_{E-M}}{c} = 7.6\,\text{мин},\;\; t_V = \frac{r_{E-V}}{c} = 5.9\,\text{мин}, \tag{11}$$

где $c = 300000$ км/с – скорость света в вакууме.

<u>Ответ:</u> $t_M = \frac{r_{E-M}}{c} = 7.6$ мин, $t_V = \frac{r_{E-V}}{c} = 5.9$ мин ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8.

<u>Условие:</u> Звезда Глизе 581 (Gliese 581) из созвездия Весов находится на расстоянии 20.4 световых лет от нас. К сегодняшнему дню у этой звезды астрономам удалось открыть настоящую планетную систему из шести планет, одна из которых находится в "пригодной для земной жизни зоне". Сколько лет потребуется космическому кораблю, летящему со скоростью 25 км/с, чтобы достичь Глизе 581?

<u>Дано:</u>

$r = 20.4$ св. л.,
$V = 25$ км/с,

<u>Найти:</u>

t – ?

<u>Решение:</u>

Как известно, **1 световой год** – это расстояние которое проходит свет в вакууме (в пустоте) за один тропический год и который равен

$$1\,\text{св. год} = 9.46 \cdot 10^{12}\,\text{км}. \tag{12}$$

Как известно, скорость света в вакууме равна $c = 300000$ км/с, следовательно, скорость корабля составляет 0.000083 от скорости света. Тогда время, в течение которого корабль достигнет Глизе 581 можно определить из равенства:

$$20.4\,\text{лет} \cdot c = 0.000083 \cdot c\,t \;\;\Rightarrow\;\; t = \frac{20.4\,\text{лет}}{0.000083} = 244800\,\text{лет}. \tag{13}$$

<u>Ответ:</u> $t = 244800$ лет ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 9.

<u>Условие:</u> 2 марта этого года астероид 2009 DD45 пролетел между Землей и Луной. Предположим, что астероид в некоторый момент оказался точно на прямой, соединяющей наблюдателя на Земле и центр Луны, двигался со скоростью 30 км/с под углом 30° к этой прямой и находился на расстоянии 100 тыс.км от наблюдателя. Найдите время, за которое астероид для наблюдателя пересек диск Луны. Радиус Луны в 4 раза меньше радиуса Земли, расстояние от Земли до Луны равно примерно 60 радиусам Земли. (7 баллов).

<u>Дано:</u>

$V = 30$ км/с,
$\alpha = 30^\circ$,
$r_a = 100$ тыс. км,
$R_{☾} = \frac{1}{4} R_\oplus$,
$r_{☾} = 60\, R_\oplus$.

<u>Найти:</u>

t – ?

<u>Решение:</u>

Как известно, радиус Земли примерно равен $R_\oplus \approx 6400$ км, поэтому астероид пролетел на расстоянии, равном $r_a = 15.6 \cdot R_\oplus$. Далее немного упростим задачу – будем считать, что астероид пересекал прямую, соединяющую наблюдателя и Луну, перпендикулярно. Тогда путь x, пройденный астероидом на фоне диска Луны, относится к расстоянию до него так же, как диаметр Луны к расстоянию до нее (следует из подобия треугольников или теоремы Фалеса):

$$\frac{x}{15.6\, R_\oplus} = \frac{2R_{☾}}{60\, R_\oplus}, \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{15.6}{120} R_\oplus = 0.13\, R_\oplus \approx 830\,\text{км}. \tag{14}$$

Теперь вспомним, что астероид двигался под углом $\alpha = 30^\circ$ к прямой. Так как расстояние между Землей и Луной намного больше 832 км, то можно считать, что за счет этого путь астероида на фоне диска Луны увеличился в $1/\sin 30^\circ = 2$ раза. В итоге получаем путь, равный 1660 км. Так как астероид двигался со скоростью 20 км/с, время пересечения окажется равным 83 с.

Ответ: $t = 83$ с ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 10.

Условие: Оцените, во сколько раз отличаются скорости низколетящих спутников Земли и Юпитера, если известно, что радиус Юпитера примерно в 10 раз меньше радиуса Солнца. (8 баллов).

Дано:

$R_J = \frac{1}{10} R_\oplus$.

Найти:

η – ?

Решение:

Обозначим массу планеты как $\mathfrak{M}$, а радиус – $\mathfrak{R}$. Так как спутники низколетящие, то это означает, что орбиты у спутников круговые и радиус орбиты приближенно равен радиусу соответствующей планеты ($r_s \approx \mathfrak{R}$). Согласно второму закону Ньютона для спутника, движущегося по круговой орбите под действием силы всемирного тяготения, имеем

$$m_s \frac{V_s^2}{r_s} = \frac{G\, m_s\, \mathfrak{M}}{r_s^2}, \;\Rightarrow\; V_s = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}}. \tag{15}$$

здесь m_s, V_s, r_s – масса, скорость, радиус орбиты спутника; $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Учтем, также что массу планеты можно представить в виде:

$$\mathfrak{M} = \rho \cdot V = \rho \frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}^3, \;\Rightarrow\; V_s = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G\,\rho\,\mathfrak{R}^2}. \tag{16}$$

Учитывая, что массовая плотность Земли Юпитера и Земли равны (согласно справочным данным) $\rho_\oplus = 5.5$ г/см^3, $\rho_J = 1.3$ г/см^3, $R_\odot = 109 \cdot R_\oplus$ тогда

$$\eta = \frac{V_J}{V_\oplus} = \sqrt{\frac{\rho_J}{\rho_\oplus}\frac{\mathfrak{R}_J^2}{\mathfrak{R}_\oplus^2}} = \sqrt{10.9^2 \frac{1.3}{5.5}} \approx 5. \tag{17}$$

Ответ: $\eta = \frac{V_J}{V_\oplus} \approx 5$ ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11.

Условие: В некотором году 1 января пришлось на воскресенье. Найдите минимально возможное и максимально возможное количество лет, которое может пройти до следующего 1 января, которое также придется на воскресенье. (9 баллов).

Дано:

1 января $\leftrightarrow$ воскресенье.

Найти:

$N_{\min}, N_{\max}$ – ?

Решение:

Как известно, в нашем (григорианском) календаре существует ***обычные*** (продолжительность – 365 дней) и ***високосные*** (продолжительность – 366 дней) годы. Поделим 365 и 366 на 7 (количество суток в недели). Получим остатки, равные, соответственно, 1 и 2.

Это означает, что если воскресенье 1 января был в високосном году, то следующее 1 января будет вторником, а если в невисокосном – вторником.

Тогда каждые четыре года 1 января будет смещаться на 5 дней недели вперед и очевидно, что сдвиг на 7 дней недели может произойти не менее чем за 5 лет (в течение которых должно быть два високосных года). Первый ответ получен, возможный минимум $N_{\min} = 5$ лет.

Второй ответ получить сложнее. Ясно, что продолжительность цикла без понедельников увеличится в том случае, если в цикле будет високосный год, начинающийся в субботу (назовем его "опорным") - тогда следующий начнется в понедельник. Отсчитывая дни недели 1 января от этого опорного года вперед и назад, получим такую последовательность дней 1 января: воскресенье, понедельник (високосный), вторник, четверг, пятница, суббота (високосный, опорный), понедельник, вторник, среда, четверг(високосный), суббота, воскресенье. Получается последовательность длиной в 11 лет. Сделать так, чтобы в ней два високосных года начинались на воскресенье, уже не удастся - числа 4 (цикл високосных годов) и 7 (цикл дней недели) взаимно просты, поэтому такие года отстоят друг от друга на 28 лет.

Тем не менее улучшить этот результат все же можно. Дело в том, что некоторые года, номера которых делятся на 4, в григорианском календаре не являются високосными. Это года, номера которых делятся на 100 и не делятся на 400 (за всю историю григорианского календаря таких было три - 1700, 1800,1900). Если номер нашего опорного года заканчивался на ...96 и следующий за ним високосный год появлялся только через 8 лет (годятся такие варианты: 1696, 1796, 1896), то конец предыдущей последовательности "четверг (високосный), суббота, воскресенье"превратится в такой: "четверг (невисокосный, номер заканчивается на два нуля), пятница, суббота, воскресенье". Последовательность удлиняется на один год и ее длина достигает 12 лет. Аналогичной будет и ситуация, когда опорный год заканчивается на ...04 – в этом случае последовательность также удлиняется на один год, только спереди. Но так как удлинить ее с двух сторон сразу невозможно, то максимально возможная продолжительность остается равной $N_{\max} = 12$ годам.

<u>Ответ:</u> $N_{\min} = 5$ лет, $N_{\max} = 12$ лет ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12.

<u>Условие:</u> В 2010 году противостояние Юпитера пришлось на 21 сентября. В каком созвездии был виден Юпитер? В какой момент года будет наблюдаться противостояние Юпитера в 2013 году? В каком созвездии он будет виден? (10 баллов).

<u>Дано:</u>

21.09.2010 г. – противостояние Юпитера.

<u>Найти:</u>

В каком созвездии был виден Юпитер? в 2013?

<u>Решение:</u>

21 сентября 2010 года – это канун осеннего равноденствия (оно произошло 23 сентября в $03^h\ 09^m$ по всемирному времени). В это время Солнце должно находится в непосредственной близости от небесного экватора и точки осеннего равноденствия. Следовательно, Юпитер должен находиться в непосредственной близости от точки весеннего равноденствия. которая на то момент находилась в созвездии Рыбы. Следовательно, Юпитер должен находится в том же созвездии и это, действительно, так и было! Для определения даты противостояния Юпитера в 2013 году необходимо знать его синодический период обращения для земного наблюдателя. Для этого воспользуемся уравнением синодического движения:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_J}, \ \Rightarrow \ S = \frac{T_\oplus \cdot T_J}{T_J - T_\oplus} = 1.092\,\text{года} \approx 399\,\text{суток}. \qquad (18)$$

где $T_\oplus = 1$ год $= 365.25$ суток, $T_J = 11.8618$ года – сидерический период обращения Юпитера вокруг Солнца. Т.о. каждое последующее противостояние Юпитера должно происходить на 34(33) суток позже соответствующей даты предыдущего. Тогда получаем следующие даты противостояния Юпитера, представленные в таблице.

№	Дата по расчетам	Точная дата
1	21 сентября 2010	21 сентября 2010
2	25 октября 2011	29 октября 2011
3	27 ноября 2012	3 декабря 2012
4	31 декабря 2013	6 января 2014
5	3 февраля 2015	7 февраля 2015

Из таблицы следует, что искомая дата согласно расчетам – 31.12.2013, однако точные расчеты профессионалов указывают на то, что противостояния в 2013 году не произойдет (см. например, http://reference.wolfram.com/legacy/applications/astronomer/Tables/JupiterOpposition.html). Из сопоставления расчетных данных и точных прогнозов профессионалов следует, что разница в датах 3-4 суток.

Это обусловлено эллиптичностью орбит Земли и Юпитера (что не принято во внимание при построении синодического уравнения) и как следствие, изменением угловой скорости движения планеты вокруг Солнца, которая является ключевой характеристикой в определении искомой даты. В начале января – Солнце находится в Стрельце, следовательно, Юпитер должен находиться в диаметрально противоположном на небесной сфере зодиакальном созвездии – Близнецы.

Ответ: В 2013 году противостония Юпитера не будет. Ближайшее противостояние произойдет 6.01.2014 года. Юпитер будет находиться в Близнецах. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Задача № 13.

Условие: Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах? (11 баллов).

Решение:

Во время солнечного затмения лунная тень движется по поверхности Земли приблизительно с запада на восток со скоростью около 1 км/с (это скорость движения Луны по орбите). В ту же сторону, но с меньшей скоростью, происходит суточное движение земной поверхности: на экваторе его скорость достигает $2\pi R_{\oplus}/24^h = 0.5$ км/с, а на полюсах уменьшается до нуля. Поэтому в районе экватора скорость тени относительно поверхности составляет только 0.5 км/с. Приняв диаметр лунной тени в 200 км, легко вычислить, что в высоких широтах затмение может продолжаться около 3.5 минут, тогда как на вблизи экватора – до семи минут.

Ответ: На экваторе, в силу вращения Земли, относительная скорость движения тени от Луны наименьшая, поэтому время затмения будет наибольшим. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14.

Условие: От звезды 0^m на один сантиметр земной поверхности падает около 1 млн. фотонов в секунду. Сколько фотонов попадет на фотопластинку от звезды 20^m за 1 час, если диаметр объектива телескопа 1 м? (11 баллов).

Дано:

$m_1 = 0^m$, $\Delta t_1 = 1$ с, $\Delta S = 1$ см^2, $\Delta N_1 = 10^6$;
$m_2 = 20^m$, $\Delta t_2 = 1$ час, $D_2 = 1$ м.

Найти:

ΔN_2 – ?

Решение:

Согласно ***условию Погсона***: *разность звездных величин двух светил, равная $m_2 - m_1 = 5^m$ отвечает отношению освещенностей $E_1/E_2 = 10^2$*. Следовательно, разность в 20^m отвечает отношению освещенностей, равному 10^8. Освещенность, создаваемую звездой с 0^m, можно представить как

$$E_1 = \frac{\Delta N_1 \cdot \varepsilon}{\Delta S_1 \cdot \Delta t_1}. \tag{19}$$

здесь ε – энергия одного фотона.

Аналогично можно записать для звезды с 20^m:

$$E_2 = \frac{\Delta N_2 \cdot \varepsilon}{\Delta S_2 \cdot \Delta t_2} \tag{20}$$

Поделим (19) на (20):

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}\right)\left(\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}\right)\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t_1}\right), \ \Rightarrow$$

$$\Delta N_2 = \Delta N_1 \left(\frac{E_2}{E_1}\right)\left(\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}\right)\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right) = 10^6 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 10^4}{4}\right) \cdot 3600 = 2.83 \cdot 10^5 \text{ фотонов.} \tag{21}$$

<u>Ответ:</u> $\Delta N_2 = 2.83 \cdot 10^5$ фотонов. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 15.

<u>Условие:</u> 12 января 2012 года состоялось прохождение своего перигелия кометой Леви 2006 T1. Как показали наблюдения 2006 года, комета движется по эллиптической орбите с коротким периодом $T = 5.28$ года и эксцентриситетом $\varepsilon = 0.668$. Между орбитами каких планет Солнечной системы расположена орбита этой кометы? Может ли она сближаться с Землей? Если да, то до какого расстояния? (12 баллов).

<u>Дано:</u>

$T = 5.28$ года,
$\varepsilon = 0.668$.

<u>Найти:</u>

q, Q – ?

<u>Решение:</u>

Для того чтобы ответить на вопрос "между орбитами каких планет Солнечной системы расположена орбита этой кометы?" необходимо определить расстояние от Солнца до перигелия q и афелия Q кометы:

$$q = a(1-\varepsilon), \ \ Q = a(1+\varepsilon). \tag{22}$$

здесь a – большая полуось эллипса орбиты кометы. Для определения последней необходимо воспользоваться третьим законом Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}, \ \Rightarrow \ \ a = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{T^2}{T_\oplus^2}} = 3.0322 \, \text{а.е.} \tag{23}$$

здесь $T_\oplus = 1$ год – сидерический период обращения Земли вокруг Солнца, $a_\oplus = 1$ а.е. – большая полуось земной орбиты.

$$q = 3.0322 \cdot (1 - 0.668) = 1.00669 \text{ а.е.}, \ Q = 3.0322 \cdot (1 + 0.668) = 5.0577 \, \text{а.е.}. \tag{24}$$

Очевидно, что расстояние до перигелия чуть больше большой полуоси земной орбиты $a_\oplus$ (перигелий кометы, в принципе, может лежать как внутри орбиты Земли так и вне ее, поскольку эксцентриситет земной орбиты $\varepsilon_\oplus = 0.017$, то $q_\oplus = a_\oplus(1-\varepsilon_\oplus) = 0.983$ а.е., $Q_\oplus = a_\oplus(1+\varepsilon_\oplus) = 1.017$ а.е.), но меньше большой полуоси Юпитера ($a_J = 5.2$ а.е. , согласно (9)). Т.о. орбита кометы лежит между орбитами Земли и Юпитера. Комета, в принципе, может сближаться с Землей, если большая ось эллипса ее орбиты лежит или составляет малый угол с плоскостью орбиты Земли. В этом случае среднее минимальное расстояние между Землей и кометой $\Delta r = q - a_\oplus = 10^6$ км.

<u>Ответ:</u> Орбита кометы лежит между орбитами Земли и Юпитера. Комета, в принципе, может сближаться с Землей, если большая ось эллипса ее орбиты лежит или составляет малый угол с плоскостью орбиты Земли. При этом среднее минимальное расстояние между Землей и кометой $\Delta r = q - a_\oplus = 10^6$ км. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 16.

Условие: Космический корабль опустился на астероид диаметром 1 км и средней плотностью 2.5 г/см^3. Космонавты решили объехать астероид по экватору на вездеходе за 2 часа. Смогут ли они это сделать? (13 баллов).

Дано:

$\Delta t = 2$ часа,
$D = 1$ км.
$\rho = 2.5$ г/см^3.

Найти:

Смогут объехать астероид по экватору на вездеходе?

Решение:

Нет, не смогут. Вездеход должен двигаться со скоростью не больше первой космической, иначе он оторвется от поверхности и потеряет опору. Найдем время облета астероида по низкой орбите с этой предельной скоростью:

$$T = \frac{2\pi R}{V_I}, \text{ где } V_I = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}}{R}}. \tag{25}$$

V_I – первая космическая скорость для данного астероида.

Учтем также что массу астероида можно представить в виде:

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\rho\pi R^3. \tag{26}$$

тогда период обращения представляется в виде:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6.673\cdot 10^{-11}\, 2.5\cdot 10^3}} = 7516c = 2.09\,\text{часа} > 2\,\text{часа}. \tag{27}$$

значит вездеход не сможет объехать астероид за указанное время.

Ответ: вездеход не сможет объехать астероид за указанное время. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17.

Условие: Три звезды одинаковой массы образуют равносторонний треугольник со стороной L и двигаются по одной окружности с периодом T. Найти массы звезд.

Дано:

L,
T.
$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}$

Найти:

$\mathfrak{M}$ – ?

Решение:

Рассмотрим круговое движение звезды 1 (см. рис. 4). Поскольку последняя движется по окружности с постоянной скоростью, то результирующая сила, действующая на данное тело – центростремительная сила. Она определяется векторной суммой двух одинаковых по модулю сил притяжения – $\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{31}$, действующих со стороны двух других звезд на данную.

Согласно правилу сложения векторов, с использованием свойств треугольника имеем:

$$F_{\text{рез}} = 2\,F_{21}\cos 30^\circ = 2\frac{G\mathfrak{M}^2}{L^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\frac{G\mathfrak{M}^2}{L^2}. \tag{28}$$

С другой стороны центростремительную силу можно представить в виде:

$$F_{\text{ц.с.}} = \mathfrak{M}\cdot a_{\text{ц.с.}} = \mathfrak{M}\cdot\frac{V^2}{R}. \tag{29}$$

учитывая, что движение по окружности является равномерным и связь радиуса окружности с стороной треугольника

$$V = \frac{2\pi R}{T}, \;\; R = \frac{L}{\sqrt{3}}, \tag{30}$$

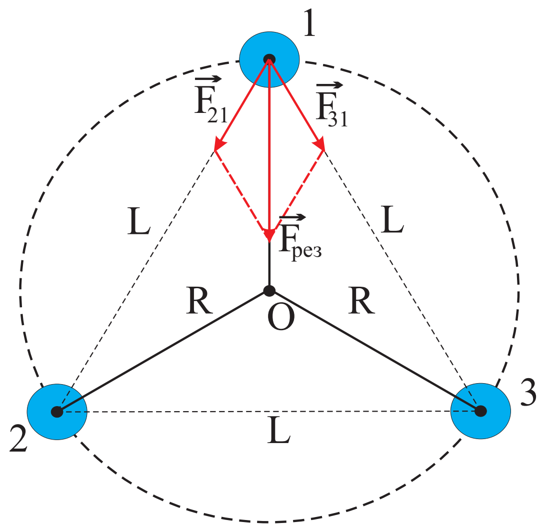

Рис. 4.

в результате получаем уравнение вида (второй закон Ньютона для звезды 1):

$$\mathfrak{M}\frac{4\pi^2 L}{\sqrt{3}T^2} = \sqrt{3}\frac{G\mathfrak{M}^2}{L^2}, \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi^2\frac{L^3}{GT^2}. \tag{31}$$

Ответ: $\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi^2\frac{L^3}{GT^2}$. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18.

Условие: С какой планеты Солнечной системы можно увидеть невооруженным глазом спутники двух соседних планет? (15 баллов).

Решение:

Попробуем сформулировать критерии отбора такой планеты.

- Во-первых, у нее должно быть две соседних планеты. Следовательно, Меркурий и Нептун исключаются.
- Во-вторых, у этих двух соседних планет должны быть спутники. Следовательно, отпадают Венера (у Меркурия спутников нет) и Земля (у Венеры тоже нет).

Далее. Спутник будет тем заметнее, чем он больше по размеру. В качестве кандидатов уместно рассмотреть 6-7 самых крупных спутников Солнечной системы (это Луна, галилеевы спутники Юпитера, спутник Сатурна Титан и Нептуна – Тритон). Спутники Марса с Юпитера не увидеть (поскольку их и с Земли, которая ближе, не заметить), у Урана таких крупных спутников нет, так что Юпитер и Сатурн можно также исключить. В итоге остается только два варианта Ч Марс и Уран. Чем ближе планета к Солнцу, тем, при прочих равных условиях, будут ярче ее спутники. Кроме этого, радиусы орбит планет с увеличением порядкового номера планеты очень быстро растут, поэтому и минимальные расстояния между соседними планетами тоже увеличиваются с удалением от Солнца. Оба этих обстоятельства (а также тот факт, что Тритон – самый маленький из крупных спутников, и увидеть его с Урана было бы сложно и по этой причине тоже) приводят к однозначному выводу – искомой планетой является Марс, с которого невооруженным глазом видна Луна и галилеевы спутники Юпитера. Это действительно так – известен факт, что галилеевы спутники Юпитера можно было бы видеть невооруженным глазом даже с Земли (они имеют примерно $+5^m$ звездную величину), если бы не находящийся рядом яркий Юпитер.

Ответ: С Марса можно увидеть невооруженным глазом спутники двух соседних планет ($\$_{\max} = 15$ баллов).